

# OBTENCION DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA POR INTERPOLACION EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

J. MORELL FUENTES, E. ALARCON, M<sup>a</sup> DEL SAGRARIO GOMEZ LERA

Departamento de Mecánica Estructural y Construcciones Industriales  
Universidad Politécnica de Madrid

El método de la respuesta en frecuencia basado en el análisis de Fourier, se emplea para obtener la respuesta permanente de una estructura sometida a una fuerza de excitación no armónica o no periódica. La principal desventaja frente a otros métodos es la necesidad de obtener el espectro de respuesta para los infinitos puntos que forman el dominio de frecuencias.

En este artículo se presenta un modelo de interpolación que permite reducir a unos pocos el n<sup>o</sup> de puntos en que se resuelve la ec. dinámica. Tales puntos son las frecuencias propias de la estructura. El espectro completo se obtiene por interpolación. En este sentido el tiempo de cálculo consumido se reduce ostensiblemente y el método gana en eficiencia.

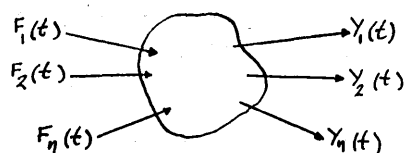
La validez del modelo se refleja en varios ejemplos de pórticos planos con amortiguamiento viscoso.

## INTRODUCCION

En el campo de la Mecánica es habitual encontrar multitud de problemas que precisan un estudio dinámico. Matemáticamente se puede establecer la ecuación diferencial que representa el comportamiento del sistema, pero sólo para los casos más sencillos se puede llegar a una solución directa. De esta solución la componente permanente es la que habitualmente se precisa.

FUNCION DE  
EXCITACION

RESPUESTA  
PERMANENTE



Para el caso de estructuras, el sistema está excitado por una fuerza y la respuesta son sus desplazamientos. Simplificando la realidad se discretiza el sistema en 'n' grados de libertad y la ecuación de equilibrio, supuesto amortiguamiento viscoso, queda:

$$\underline{M} \ddot{\underline{Y}} + \underline{C} \dot{\underline{Y}} + \underline{K} \underline{Y} = \underline{F} \quad (1)$$

donde  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$  y  $\underline{K}$  son las matrices que fijan las propiedades del sistema (masa, amortiguamiento, rigidez),  $\underline{Y}(t)$  y  $\underline{F}(t)$  son los desplazamientos y el vector de fuerzas generalizadas. Ambas son funciones

del tiempo.

La ec. (1), junto con las condiciones de contorno se puede resolver con alguno de los métodos disponibles. Si las propiedades del sistema dependen de la frecuencia de excitación como es el caso de los problemas de interacción suelo-estructura, el cálculo dinámico en frecuencias es el más recomendable.

En este método se caracteriza la estructura por su respuesta en función de la frecuencia de la fuerza de excitación armónica. Se trata de aplicar el análisis de Fourier. La fuerza se descompone en sus componentes armónicas, se obtienen las respuestas a estas componentes que a su vez son las componentes armónicas de los desplazamientos definitivos. Se puede decir que se da un rodeo para evitar la dificultad de la resolución directa.

En el caso de una fuerza no periódica se tiene para cada gdl la pareja de transformadas:

$$\underline{F}_j(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}_j(w) \cdot e^{iwt} \cdot dw \quad (2)$$

$$\underline{F}_j(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}_j(t) \cdot e^{-iwt} \cdot dt \quad (3)$$

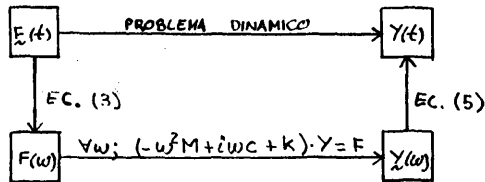
donde  $\underline{F}_j(w)$  es la amplitud compleja de una excitación armónica. Empleando estas transformadas también para los desplazamientos la ec (1) se convierte en una tipo estático mucho más sencilla de resolver:

$$(-w^2 \underline{M} + iw \underline{C} + \underline{K}) \underline{Y}(w) = \underline{F}(w) \quad (4)$$

Las componentes  $Y_j(t)$  se obtienen a partir del espectro  $Y_j(w)$ :

$$Y_j(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_j(w) e^{iwt} dw \quad (5)$$

El proceso se resume en esta figura:



La ec. (4) es muy sencilla aunque se debe de resolver en infinitos puntos para formar el espectro continuo en frecuencias, a lo que hay que añadir la posible dificultad de las integrales. Para evitar estos inconvenientes se pueden seguir los siguientes pasos:

- Reducir los cálculos al semiespacio positivo ( $0 \leq w < \infty$ ) para generar el espectro completo gracias a las propiedades de simetría de la transformada de Fourier:

$$F(w) = A(w) - iB(w)$$

$A(w)$  simetría par  
 $B(w)$  simetría impar

- En el caso de excitación no periódica, discretizar el intervalo continuo para aplicar la transformada rápida de Fourier.

- Aún así, el nº de veces que se resuelve la ec.(4) es muy alto. Si se emplea algún tipo de interpolación que permita generar  $Y(w)$  con una precisión satisfactoria a partir de una base constituida por unas pocas frecuencias, el problema se simplifica considerablemente. Así se logra convertir lo que parecía un rodeo en un atajo.

Aquí se presenta un modelo donde se toman como base las frecuencias propias de la estructura. Forma parte del Proyecto Fin de Carrera "Cálculo dinámico de estructuras de barras para solicitaciones con alto contenido en frecuencias" presentado en la ETS Ingenieros Industriales de la UPM. A priori se debe admitir la posibilidad de generar así el espectro. La respuesta de una estructura a una determinada frecuencia es la combinación de sus modos de vibración. Cada modo de vibración es la forma fundamental en que se mueve la estructura al excitarla a una frec. propia. Por lo tanto, a partir de las frec. propias y la respuesta asociada puede ser posible obtener el espectro de respuesta para cualquier frecuencia.

El modelo se ha probado en pórticos planos con vibración por flexión y axil con amortiguamiento viscoso, pero parece posible aplicarlo a cualquier tipo de estructura.

Las frecuencias propias de los pórticos se cal-

cularon mediante un método iterativo basado en los métodos diferenciales para vibraciones libres y procesos de obtención de autovalores. Dado que el amortiguamiento supuesto es pequeño, las frecuencias naturales están muy próximas a las auténticas teniendo en cuenta el amortiguamiento.

## MODELO PROPUESTO

Conociendo unos pocos pares de valores se pretende interpolar para el resto del dominio una función dependiente de la frecuencia: la amplitud compleja  $Y(w)$  de la respuesta permanente a una excitación armónica.

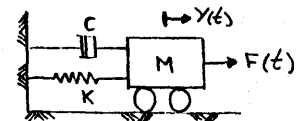
$$F(w) \cdot e^{iwt} \longrightarrow Y(w) \cdot e^{iwt}$$

Para conseguir esto sólo es necesaria, para las pruebas realizadas, una pequeña base formada por las primeras frec. propias y la respuesta  $Y(w)$  correspondiente.

Considerese una estructura compuesta por 'n' grados de libertad y para la que se conocen 'r' frec. propias y sus modos asociados:

$$w_1, w_2, \dots, w_r$$

La principal idea del modelo es suponer que cada gdl se comporta como una combinación de sistemas de 1 gdl con dichas frec. propias y desacoplado del resto de gdl en lo que respecta a la interpolación. La respuesta permanente en tales sistemas se obtiene con la Función de Transferencia  $H(w)$ :



$$F(t) = F_0 \cdot e^{iwt}$$

$$Y(t) = Y_0 \cdot e^{iwt}$$

La amplitud de los desplazamientos:

$$Y_0 = \frac{F_0/k}{1 - (\frac{w}{w_0})^2 + 2i\zeta(\frac{w}{w_0})} = H(w) \cdot F_0 \quad (6)$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Si la expresión anterior se divide por la flecha estática se obtiene una función adimensional de la frecuencia llamada coeficiente de amplificación, muy útil en este modelo:

$$\rho(w) = \frac{1}{1 - (\frac{w}{w_0})^2 + 2i\zeta(\frac{w}{w_0})} \quad (7)$$

(FLECHA ADIMENSIONAL)

En el caso de una estructura cualquiera, no se tiene una única frec. propia  $w$  sino que se conocen

k frec. propias. Se puede suponer que el desplazamiento adimensional 'D' de un gdl para cualquier frecuencia es la combinación de los coeficientes de amplificación asociados a cada frec. propia, es decir, la combinación de la respuesta de un sistema de 1 gdl con diferentes frec. propias.

$$D(\omega) = [f_1(\omega), \dots, f_n(\omega)] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$D(\omega) = f(\omega) \cdot \alpha$$

Aplicando la ec. (8) para el caso de las frec. propias  $\omega_j$  se obtiene un sistema de ecuaciones que permite despejar  $\alpha_i$ . Estos coeficientes sólo dependen de las frec. propias y el amortiguamiento y son fijos para todo el dominio de frecuencias. Representan el tanto por uno de participación de cada  $f_i(\omega)$  tanto en módulo como en fase.

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad (f_{ij} = f_i(\omega_j))$$

$$D_{wp} = C_f \cdot \alpha \quad (9)$$

$$\alpha = C_f^{-1} \cdot D_{wp} \quad \sum \alpha_i = 1 + i0$$

Para cualquier frecuencia:

$$D(\omega) = f(\omega) \cdot C_f^{-1} \cdot D_{wp} \quad (10)$$

Se puede dar a la ec. (10) una expresión más formal tomando unas funciones de interpolación  $N_i(\omega)$ .

$$\begin{aligned} D(\omega) &= N(\omega) D_{wp} \\ N(\omega) &= f(\omega) C_f^{-1} \end{aligned} \quad (11)$$

Las funciones  $N_i(\omega)$  cumplen que

$$N_i(\omega_j) = \begin{cases} 0 + i0 & i \neq j \\ 1 + i0 & i = j \end{cases}$$

y representan la contribución del desplazamiento a una fr. propia en la vibración a una frecuencia  $\omega$ , es decir, lo que se podría llamar la contribución de cada modo.

A la vista de la formulación, únicamente es necesario resolver la ec. (4) en las fr. propias para poder calcular la amplitud de los desplazamientos a cualquier frecuencia:

$$Y_i(\omega) = N_i(\omega) Y_{wp} \quad (12)$$

El proceso es muy sencillo y fácil de implementar en un ordenador. Lo primero será calcular la matriz  $C_f$ , que es invariable para cualquier frecuencia, y su inversa. Para cada  $\omega$  se obtiene el vector  $f(\omega)$  y con ellos las funciones  $N(\omega)$  que multiplicadas con los desplazamientos en las fr. propias permite conocer el movimiento del gdl.

En un principio puede parecer que la precisión de la interpolación aumentará con el nº de fr. propias que forman la base. Se ha comprobado que esto no es así, incluso puede empeorar mucho. Por ello cabe preguntarse ¿qué fr. deben considerarse?

A la vista de los ejemplos, parece más probable que se deben tomar aquellas cuyos modos de vibración produzcan movimiento del gdl que se considera. Para una misma estructura la base será distinta según el gdl que se aborda. De dichos modos, el de menor frecuencia será el de mayor contenido energético y el módulo de la amplitud del desplazamiento a esa frecuencia probablemente sea el máximo del resto de fr. propias. A medida que las fr. propias son mayores, el contenido energético del modo asociado disminuye y su contribución al movimiento es poco importante. Por esta razón, sólo con las primeras fr. propias el modelo se ajusta muy bien al espectro teórico.

Esta propiedad se emplea para determinar la primera fr. a considerar en la base. Supóngase que se conocen las 'r' primeras fr. propias, se busca el máximo módulo de los valores  $D_{wp}$  y la frecuencia a que corresponde. Esta frecuencia y las mayores a ella forman una nueva base más reducida que la inicial y cuyos resultados se ha comprobado son mejores.

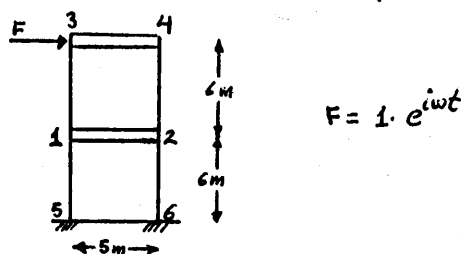
A continuación se incluyen los ejemplos que justifican las afirmaciones anteriores.

## EJEMPLOS

Se trata de aplicar el modelo a estructuras muy sencillas: pórticos de 1 vano y 2 ó 3 dinteles. Los resultados se han elaborado con un programa informático que calcula el espectro por interpolación para una lista de frecuencias de excitación y lo compara con el obtenido por resolución directa de la ec. (4) en los mismos puntos. Junto con las tablas y gráficas se incluye el error cuadrático medio entre ambas respuestas, tanto para el módulo como para la fase.

○ En el primer caso es un pórtico de 2 pisos. Los dinteles son muy rígidos y pesados en comparación con los pilares. Con ciertas simplificaciones el sistema es equivalente a uno de 2 gdl: el movimiento horizontal de los dinteles. Se considera una excita-

ción armónica unidad en el dintel superior.



Pilares:

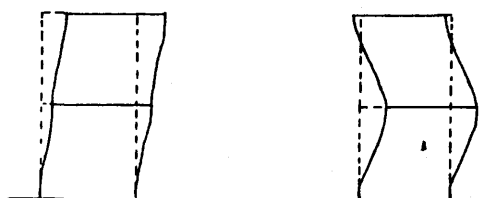
$$I = 10^{-4} \text{ m}^4 ; A = 1 \text{ m}^2$$

$$\mu = 0 \text{ kg/m} ; E = 2.1 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Dinteles:

$$I = 20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 ; \mu = 51 \text{ kg/m}$$

Sus 2 primeras frecuencias naturales se han calculado sin las simplificaciones citadas (con 12 gdl), pero es evidente que los modos de vibración se corresponden; fundamentalmente movimientos horizontales.



$$w = 18.28 \text{ rad/s}$$

$$f = 2.91 \text{ Hz}$$

$$w = 48.53 \text{ rad/s}$$

$$f = 7.72 \text{ Hz}$$

La respuesta a la carga de excitación con amortiguamiento viscoso del 2% y 10% se ha comparado con la interpolación en el intervalo (0, 56 rad/s) y 18 puntos. La base la forman las 2 primeras frec. propias (el resto son valores altos) y sus desplazamientos, que se utilizan para generar el movimiento horizontal de los forjados.

Nodo 3

$$\zeta = 0.02 \quad \text{ECM} = \begin{matrix} \text{Módulo } 0.0015 \\ \text{Fase } 0.0005 \end{matrix}$$

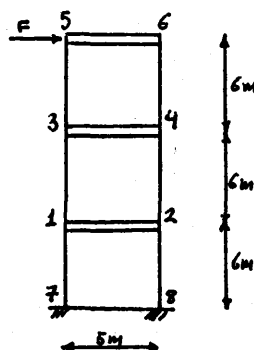
$$\zeta = 0.10 \quad \text{ECM} = \begin{matrix} \text{Módulo } 0.0027 \\ \text{Fase } 0.0043 \end{matrix}$$

(Figura 1)

En ambos casos el error ha sido obtenido de las flechas adimensionales y es verdaderamente pequeño. Para el dintel superior se ha comprobado que el modelo es igualmente válido.

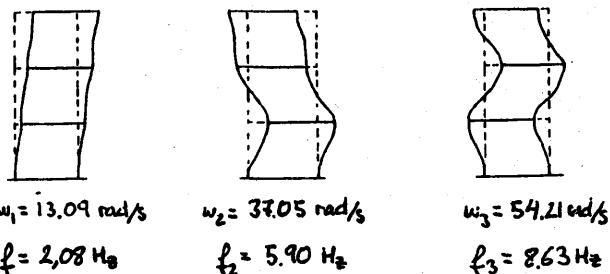
- El siguiente pórtico, similar al anterior, tiene 3 pisos y una carga armónica horizontal en el superior. Se busca generar el movimiento horizontal

de los dinteles. Se emplearán los 3 primeros modos que se corresponden a un sistema de 3 gdl.



PILARES Y DIENTES COMO EL CASO ANTERIOR

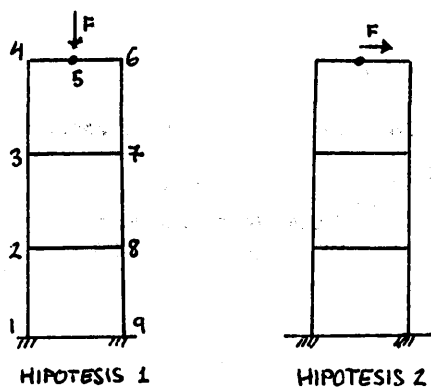
Los modos necesarios para componer los desplazamientos horizontales:



Con esta base se ha generado la respuesta en el intervalo (0, 60 rad/s) y 21 frecuencias y los mismos niveles de amortiguamiento. La aproximación es muy buena y como prueba se muestran los resultados para el último piso.

(Figura 2)

- Este último pórtico, de dimensiones idénticas al anterior, ha sido extraído de Kolousek (ref.....); los pilares no son de masa nula y las rigideces de todas las barras son del mismo orden de magnitud. De esta forma, tanto los modos de vibración disimétricos como los simétricos se producen a bajas frecuencias. Se ha incluido un nodo en mitad del dintel superior donde se aplican 2 hipótesis de carga:



Pilares:

$$I = 10^{-4} \text{ m}^4 \quad E = 2,1 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

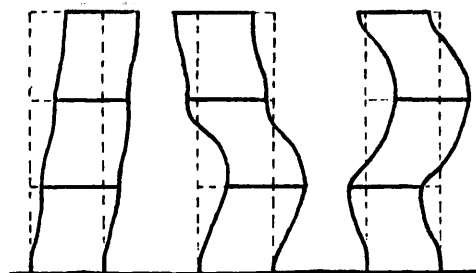
$$\mu = 20,4 \text{ kg/m} \quad A = 1 \text{ m}^2$$

Dinteles:

$$I = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

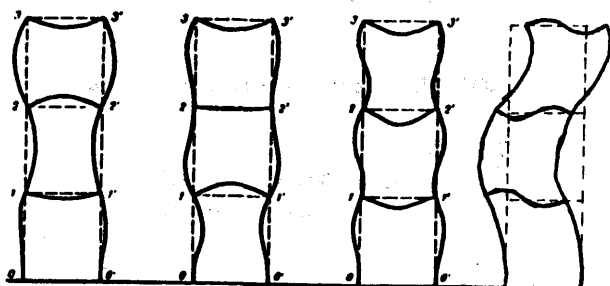
$$\mu = 51 \text{ kg/m}$$

Se han calculado las 7 primeras frecuencias naturales y modos:



$$\omega_1 = 8,40 \text{ rad/s} \quad \omega_2 = 25,92 \text{ rad/s} \quad \omega_3 = 42,47 \text{ rad/s}$$

$$f_1 = 1,34 \text{ Hz} \quad f_2 = 4,13 \text{ Hz} \quad f_3 = 6,76 \text{ Hz}$$



$$\omega_4 = 103,66 \quad \omega_5 = 126,19 \quad \omega_6 = 155,20 \quad \omega_7 = 156,46$$

$$f_4 = 16,50 \quad f_5 = 20,08 \quad f_6 = 24,70 \quad f_7 = 24,90$$

Para los gdl correspondientes a movimientos horizontales, fundamentalmente contribuirán los modos 1º al 3º, y para los asociados a giros del 4º al 6º. En el modo 7º se producen giros y desplazamientos, con lo que influye en los 2 anteriores.

Con un amortiguamiento del 10% se han calculado los movimientos con 2 hipótesis de excitación en el intervalo (0, 163 rad/s) y 31 puntos. En la 2ª hipótesis los movimientos son fundamentales horizontales, se ha generado empleando las 7 frecuencias y el resultado es muy bueno.

En la hipótesis 1ª se producen oscilaciones por flexión de los dinteles, los modos que posiblemente más intervengan son del 4º al 7º. Para comprobarlo, se han generado tales movimientos con una base de interpolación de 7 frecuencias y otra de tan solo estas 4. En este último caso la interpolación se ajusta mucho mejor a bajas frecuencias.

(Figura 3)

## CONCLUSION

Es posible generar el espectro de respuesta en frecuencias con tan solo un número reducido de frecuencias propias, sus modos asociados y la respuesta del sistema para tales frecuencias. Para cada caso se deberá determinar cuáles de tales frecuencias forman la base de interpolación.

A la vista de los ejemplos abordados, este modelo de interpolación sugiere tan buenos resultados en estructuras similares y quizás también en cualquier sistema estructural, siendo mayor su utilidad cuanto más complejo sea aquel.

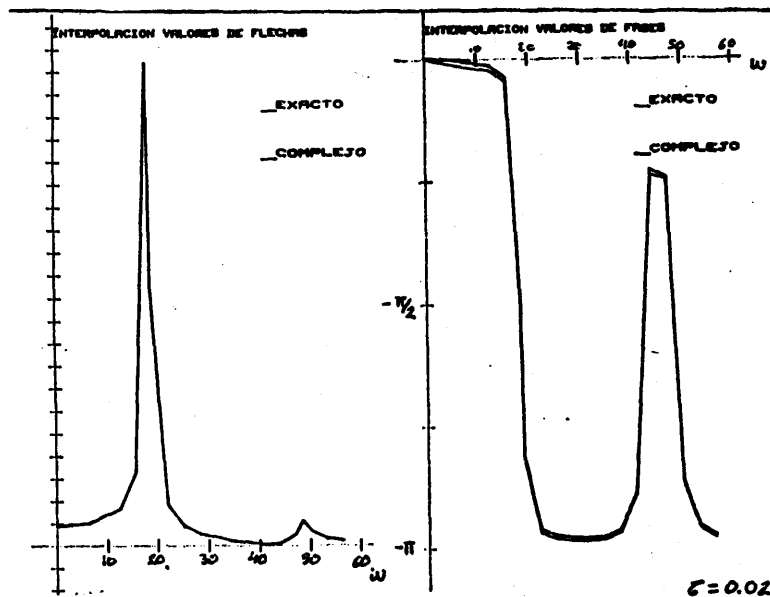
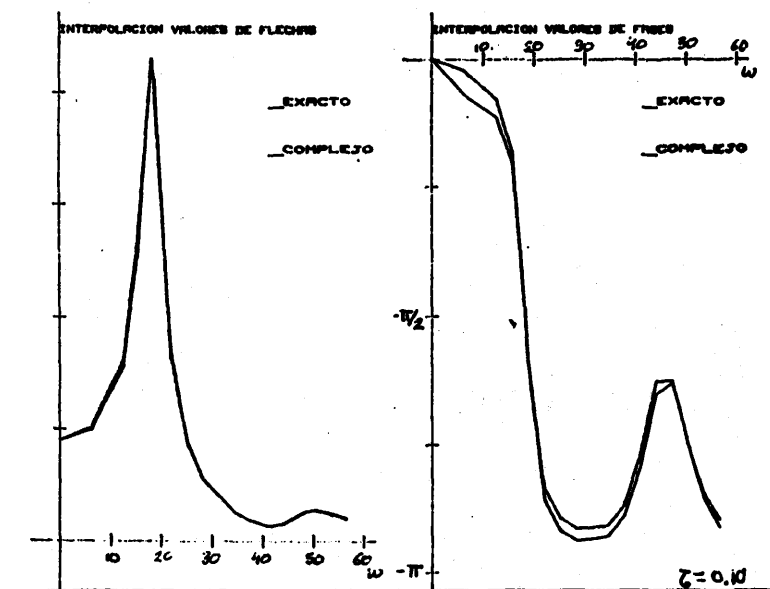


FIGURA 1

Nodo 3. Desplazamiento horizontal

$$\zeta = 2\%$$

ECM Modulo 0.0015  
Fase 0.0005



$$\zeta = 10\%$$

ECM Modulo 0.0027  
Fase 0.0043

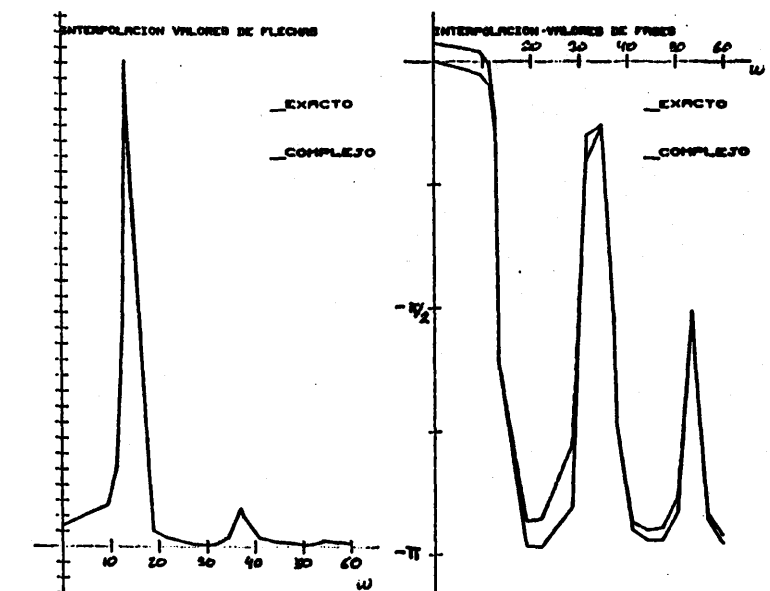


FIGURA 2

NODO 5. Desplazamiento horizontal

$$\zeta = 2\%$$

ECM Modulo 0.095  
Fase 0.015

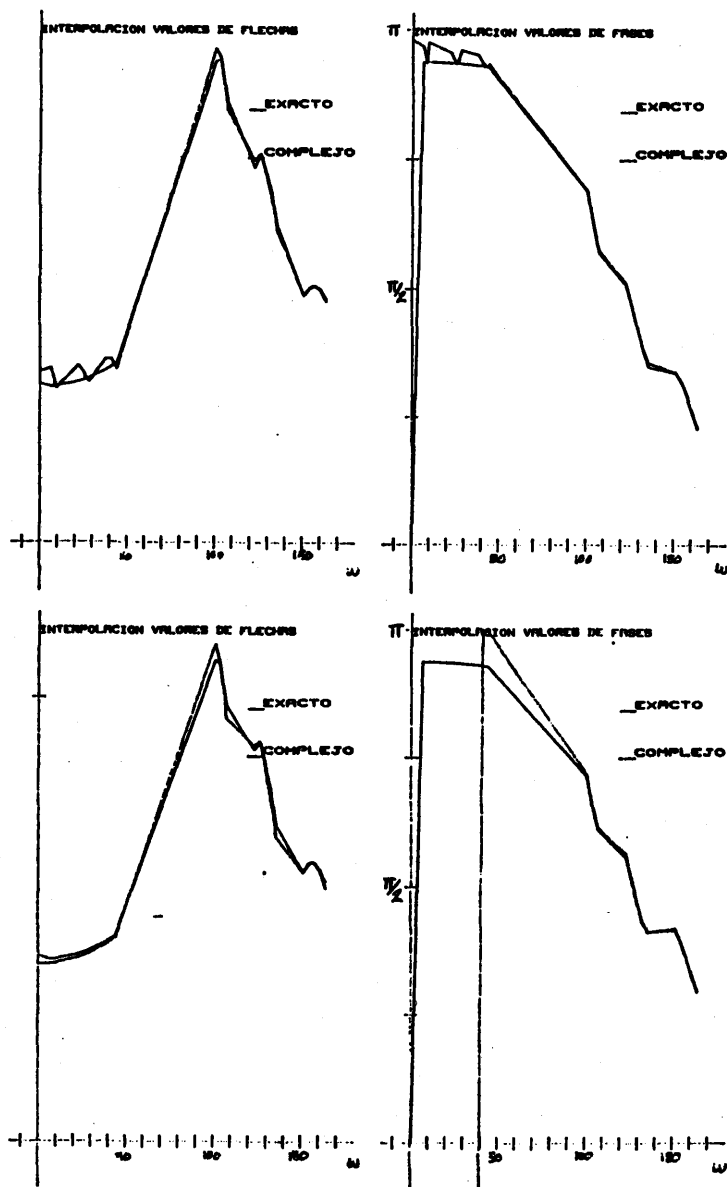


FIGURA 3

HIPOTESIS 3. NUDO 5. Desplazamiento vertical

- Interpolación con una base formada por 7 frecuencias naturales

$$\zeta = 10\%$$

ECM	Modulo	0.0037
	Fase	0.31

- Interpolación con las frecuencias naturales

4ª, 5ª, 6ª y 7ª

$$\zeta = 10\%$$

ECM	Modulo	0.0008
	Fase	10.877

NOTA: El error que aparece en la fase no es significativo porque se está aproximando a  $\pi$  con un ángulo negativo.

Por "COMPLEJO" se entiende la interpolación con magnitudes complejas.